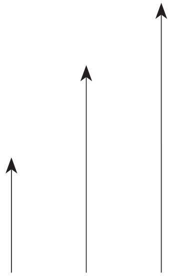
Harmonikale Proportionen in der Griechischen Architektur

Das Wort von der Architektur als ›gefrorener Musik‹ kann man recht häufig hören, freilich meist angesichts besonders gelungener und beschwingter Bauten, aber doch immer im bildlichen Sinn, als Wiedergabe des Eindrucks, daß die Ruhe und Ausgeglichenheit eines vollkommenen Bauwerks an die musikalische Harmonie erinnert. Wir nennen auch wohlgefügte Proportionen eines Bauwerks harmonisch, was dadurch gerechtfertigt scheint, daß Größenverhältnisse an Bauten oft auf einfachen ganzen Zahlen beruhen wie die den musikalischen Intervallen zugeordneten Verhältnisse der Schwingungszahlen. Daß es aber nicht nur im bildlichen Sinn, sondern im vollen Wortsinn zu Stein gewordene Musik gibt, hat Hans Kayser in seinem Werk über die Tempel von Paestum nachgewiesen.[1] Er konnte dafür auf die harmonikale Bedeutung einiger Zahlen verweisen, die an diesen Bauten häufig auftreten; er konnte ferner eine ganze Reihe von Zahlenverhältnissen aufdecken, die sich als Terzen und Quinten, ja als Dreiklänge und andere wichtige Akkorde deuten lassen. Kayser erklärt das mit, daß diese Tempel in der Umgebung des Pythagoras und seiner Schüler entstanden sind, denen die antike Überlieferung musikalische und mathematische Studien zuschreibt.

Als Beispiel sei die Bearbeitung des Frontaufrisses des Athenatempels, des früher sogenannten Cerestempels erwähnt, die sich bei Kayser auf Seite 54 seines Paestumbuches findet. Die Höhen der einzelnen Bauglieder lassen sich in einem Fußmaß zu 0,352 m als ganzzahlige Vielfache der Einheit $\frac{7}{2}$ Fuß ausdrücken. Kayser setzt die Einheit in der Regel mit dem Grundton unseres Musiksystems c gleich, was insofern berechtigt ist, als es auf Verhältnisse, auf Intervalle, nicht auf absolute Tonhöhen ankommt. Die Maßverhältnisse versteht er als Verhältnisse von Saitenlängen, weil die Alten vermutlich die Zahlenverhältnisse der Intervalle durch Saitenteilung am Monochord ermittelten. Für unseren Aufriß finden sich folgende Werte:

Giebel	$7 = 2 \cdot \frac{7}{2}$
Gesims	$7 = 2 \cdot \frac{7}{2}$
Säule	$17{,}5 = 5 \cdot \frac{7}{2}$
Krepis	$3{,}5 = 1 \cdot \frac{7}{2}$



$3 \cdot 7 \qquad 4 \cdot 7 \qquad 5 \cdot 7$

Die Höhen von Säulen, Gesims und Giebel verhalten sich also, jeweils vom Boden aus gemessen, wie 3 : 4 : 5 zueinander. Betrachtet man diese dreigliedrige arithmetische Proportion als Längenverhältnisse schwingender Saiten und setzt mit Kayser $\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$c', nn ergeben sich folgnde Tonwerte:

$(\frac{1}{2}c') \qquad 3\,f_{,,} \qquad 4\,c_{,,} \qquad 5\,as_{,,,}$

Sollen diese Werte innerhalb einer Oktav zu liegen kommen, müssen wir das $f_{,,}$ durch Multiplikation mit dem Faktor 2 eine Oktav nach unten transponieren:

$4\,c_{,,} \qquad 5\,as_{,,,} \qquad 6\,f_{,,,}$

In dieser Intervallfolge erkennen wir jetzt die Grundform des Moll-Dreiklangs. Kayser geht aber auf Seite 55 noch weiter. Er stellt fest, daß am Frontaufriß dieses Tempels in allen Maßen der Faktor 7 enthalten ist. Diese Zahl ergibt in dem Verhältnis $\frac{7}{4}{}^{\times}b$ die sog. Naturseptime zum Grundton 1c, dem siebten Ton in der Obertonreihe, wie ein ventilloses Blasinstrument dieses Intervall hervorbringt. Im Dominantseptimenakkord klingt diese Form der kleinen Septime angenehm, etwa in der Eroica, wo sie ein ventilloses Horn blasen müßte. Aber in andere senarische, d. h. auf den Zahlen 1 bis 6 beruhende, Akkorde fügt sie sich nur schwer ein. Für die Musik ist die Zahl 7 eine problematische Zahl, was nach Kayser den Pythagoreern bereits aufgefallen sein muß. Das Intervall der Naturseptime $c - {}^{\times}b$ erklinge als eine offene Frage, die eine Antwort erfordere, wozu Kayser auf die Modulationsträchtigkeit des Dominantseptimenakkordes hinweist. Habe er doch etwas Geheimnisvolles und sei deswegen geeignet, symbolisch die menschliches Maß übersteigende Größe der Gottheit darzustellen.

Man wird gegen das dargestellte Verfahren einwenden, die Proportionen des Aufrisses würden von ihrer Bedeutung im Dreiklang aus erklärt, das Wesen der Zahl 7 vom Charakter des Dominantseptimenakkordes aus.

Beide Akkorde seien jedoch nur für unser eigenes Musiksystem bedeutsam, für die Griechen dagegen hätten sie schon deswegen keine Rolle gespielt, weil ihre Musik in der Hauptsache einstimmig war. Außerdem dürfe man unser Dur-Moll-System schon deshalb nicht Untersuchungen über altgriechische Bauten zugrunde legen, weil das altgriechische Musiksystem grundsätzlich anders aufgebaut gewesen sei. Um diese Problematik wußte natürlich Kayser und äußerte sich auf Seite 36 seines Buches dazu: »Der Musikwissenschaftler möge sich nicht daran stoßen, daß ich bei einer harmonikalen Analyse altgriechischer Bauwerke die heute übliche musikalische Nomenklatur brauche … ›Dur‹ und ›Moll‹ sollen die Alten in der heutigen Bedeutung nicht gekannt haben. ›In der heutigen Bedeutung‹ – nur dies ist richtig … Gehört werden sie die Griechen ebenso haben wie wir. Wie sie sie bezeichnet haben, steht hier nicht zur Diskussion.« Ferner hat Rudolf Haase nachgewiesen, daß das Lambdoma, das Albert von Thimus und H. Kayser in seiner Struktur und umfassenden Bedeutung wieder erschlossen haben, ebensogut die Grundlage unseres Dur-Moll-Systems wie der antiken Transpositionsskalen abgibt.[2] Die beiden Tonsysteme schließen sich also keineswegs aus. Zudem wies mich R. Haase auf folgenden Sachverhalt hin: Unser heutiges Dur ist der Intervallfolge nach das Spiegelbild des griechischen Dorisch:

e f g a h c' d' e'	e' fis' gis' a' h' cis'' dis'' e''
←	→
Dorisch	Dur

Die Griechen hörten nämlich ihre Skalen von oben nach unten. Bei der Entstehung unseres heutigen Musiksystems wußte man das nicht mehr und las die Intervalle der dorischen Tonleiter von unten nach oben, woraus sich unser Dur ergab. Wegen dieser Verwandtschaft von Dur mit der griechischen Haupttonart Dorisch ist Kaysers Verfahren berechtigt.

Bei den folgenden Untersuchungen geht es also nicht darum, Kayser zu ›berichtigen‹, sondern ich möchte dasselbe Problem aus einer anderen Perspektive betrachten. Kayser ging von dem überwältigenden Eindruck dieser Tempel aus und fand als Ursache dafür deren harmonikale Proportionen. Wie man diese notiert, ist bei der starken Ähnlichkeit beider Musiksysteme von geringer Bedeutung, mögen den musikalischen Zusammenhang die Griechen auch etwas anders verstanden haben als wir. Die Tatsache der harmonikalen Proportionen wird als bewiesen vorausgesetzt. Der Ausgangspunkt soll jetzt aber das griechische Tonsystem sein, insbesondere ein für die Griechen typisches und besonders wichtiges Tongeschlecht. Es soll gezeigt werden, daß das geheimnisvollste und ehrwürdigste Tongeschlecht der Griechen den Maßgrund der Tempel von Paestum bildet. – Dazu müssen wir zunächst in knappen Umrissen das griechische Tonsystem beschreiben.

Die griechische Musik[3] kennt wie wir als Rahmenintervall die Oktave. Diese wird zunächst wieder gegliedert in zwei Quarten und einen Ganzton, der entweder zwischen den Quarten oder über diesen liegen kann, die daher ›getrennt‹ oder ›verbunden‹ heißen. Die Quarten werden mit zwei weiteren Tönen ausgefüllt, so daß die Oktave schließlich aus zwei Tetrachorden und einem Ganzton besteht. Bezugston ist dabei die Mese, der ›mittlere Ton‹ a. Diese Oktave wird durch je ein weiteres Tetrachord oben und unten und schließlich durch einen abschließenden unteren Ganzton erweitert. Wir erhalten damit das zwei Oktaven umfassende sog. ›größte unveränderliche System‹, das folgende Gestalt hat:

	a'		
	g'		
	f'		
	e'		
getrenntes	d'	d'	
Tetrachord	c'	c'	verbundenes
	h	h	Tetrachord
Mese	a	a	
	g		
	f		
	e		
	d		
	c		
	H		
	A		

In dieser Grundform haben wir die dorische Skala A – a' vor uns, deren mittlere Oktav e – e' durch Erweiterungen oben und unten auf den Umfang von zwei Oktaven gebracht worden ist. Die Beziehung zu unserem Dur-Geschlecht wurde bereits erwähnt.

Neben dem Verbindenden gibt es aber auch wichtige Unterschiede zwischen unserem und dem griechischen Tonsystem. Während bei uns der Tonraum zwischen e und a in einen Halbton und zwei verschieden große Ganztöne geteilt ist, finden wir bei den Griechen verschiedene Arten der Unterteilung. Außerdem verwenden wir heute in den Tonproportionen nur die Primzahlen bis einschließlich der 5, während bei den Griechen auch höhere vorkommen. Der Mathematiker und Musiktheoretiker ARCHYTAS, der zur Zeit PLATOS lebte und aus Unteritalien stammte, gibt uns drei verschiedene Teilungen des Tetrachords an, die die Griechen als drei unterschiedliche Tongeschlechter verstanden, als das diatonische, das chromatische und das enharmonische Geschlecht. In der folgenden Tabelle sind die Verhältniszahlen dieser Tetrachordstimmungen mit unserer heutigen Stimmung – soweit sie nicht temperiert ist – verglichen.[4]

	diatonisch	chromatisch	enharmonisch	modern
a				
	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$
g				
	$\frac{8}{7}$	$\frac{233}{224}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{9}{8}$
f				
	$\frac{28}{27}$	$\frac{28}{27}$	$\frac{28}{27}$	$\frac{16}{15}$
e				

Die Tabelle besagt, daß z. B. im enharmonischen Tetrachord die Schwingungszahl des obersten Tones a zu der des nächst tieferen g sich wie 5 : 4. verhält

An den Tetrachordstimmungen des Archytas fällt uns auf:

1. die durchgehende Verwendung der Primzahl 7;
2. das in allen drei Geschlechtern gleichbleibende sehr kleine Intervall e – f. Charakteristisch für ein Tongeschlecht sind somit die Intervalle f – g und g – a.
3. Die beiden untersten Intervalle des enharmonischen Geschlechts ergeben zusammen erst einen Halbton: $\frac{36}{35} \cdot \frac{28}{27} = \frac{16}{15}$ Dieses Tongeschlecht besteht somit aus einer reinen Terz und zwei Vierteltönen. Wir schreiben daher die enharmonische Stimmung besser in der folgenden Form:

e f- f a h c- c e

a b- b d

Die Griechen kannten also die reine Terz, aber in anderer Bedeutung als wir, nämlich als das charakteristische Intervall des enharmonischen Tongeschlechts.

Eine Musik aus Vierteltönen und kleinen Terzen können wir uns kaum vorstellen. Gleichwohl war die Enharmonik im klassischen Jahrhundert der Griechen das ehrwürdigste Tongeschlecht. Die Tragödie wurde mit dieser Musik aufgeführt. Als später Theorie und praktische Beherrschung verlorengegangen waren, genoß die enharmonische Musik noch legendären Ruhm. Für R. VOGEL ist gerade die Enharmonik der Schlüssel zum Ver-ständnis der griechischen Musik und ihrer Entwicklung.[5] Wir wollen sie als Grundlage des Proportionsschemas der Tempel von Paestum nachweisen.

Die Bauausführung des älteren Heratempels, der früher als Basilika bezeichnet wurde, ist ziemlich ungenau. Man kann zwar seine harmonikale Grundstruktur noch erahnen, doch bleibt die Unsicherheit groß.[6] Auch eine von den Archäologen erschlossene Planänderung ist vom harmonikalen Standpunkt aus interessant. Das Verhältnis von 18 : 9 Säulen wurde dem Tempel förmlich aufgezwungen, obwohl sich dadurch gegenüber dem ursprünglichen Plan von 19 Säulen der Langseite eine Erweiterung der Joche der Langseite ergab, die einen zwiespältigen Eindruck hinterläßt.[7] Offenbar kam es dem Architekten auf das Oktavverhältnis 18 : 9 = 2 : 1 an. Auch die übrigen noch erkennbaren Zahlen und Proportionen lassen sich harmonikal interpretieren.

Am nächst jüngeren Tempel, dem Athenatempel, der etwas nordwärts der beiden Heratempel steht, sind klare Zahlenverhältnisse in erstaunlicher Reinheit verwirklicht; er konnte geradezu als ein ›gebauter Zahlenkosmos‹ bezeichnet werden.[8] Als Grundrißverhältnis finden wir – gemessen an den Außenkanten des Stylobats, der Standfläche der Säulen – wie bereits am älteren Heratempel 9 : 4. Dieses Verhältnis ist an sich schon bedeutsam, weil es dem Intervall der None entspricht, die in sich Oktave und Ganzton umfaßt, Rahmen und Baustein des musikalischen Geschehens. Die Säulenzahl von 13 : 6 enttäuscht zunächst, weil 13 keineswegs mehr eine harmonikale Zahl ist. Die Konzeption des Tempels geht jedoch vom Joch aus, das auf allen Seiten gleich breit ist, nämlich 2,625 m oder 8 Fuß zu 0,3288 m. So sind wir berechtigt, statt der Säulen die Joche zu zählen, die an Lang- und Schmalseite im Verhältnis 12 : 5 stehen. Dasselbe Verhältnis zeigen die Seiten des Rechtecks, das von den Achsen der Ecksäulen begrenzt wird, da ja die Säulen überall gleich weit voneinander entfernt stehen.

Auch die Zella ist auf die Joche bezogen. Ursprünglich sollte sie mit den Außenkanten der Mauern 3 · 9 Joche umfassen, also das Seitenverhältnis 3 : 1 aufweisen. Später wurden die Mauern leicht eingerückt, so daß nunmehr die Breite, in den Mauerachsen gemessen, 20 Fuß, also die halbe Breite des Ecksäulenabstandes beträgt. Man hat damit zwischen zwei bedeutsamen Werten einen Ausgleich herbeigeführt.

Wir kennen bisher vier Werte, die den Grundriß bestimmen. Da das Joch die Maßeinheit bildet, liegt es nahe, auch das Verhältnis von Höhe und Breite des Joches zu berücksichtigen, das 7:3 beträgt. – Nun stellen wir das bisher gefundene Material zusammen und schreiben Tonwerte dazu, die wir zunächst auf den Grundton 1 c beziehen:

Länge : Breite (Stylobat)	9:4 d'
Länge : Breite (Ecksäulenrechteck)	12:5 es'
Zellalänge : Zellabreite	3:1 g'
Frontbreite : Zellabreite	2:1 c'
Jochhöhe : Jochbreite	7:3 es'

Die Folge c'-es'-g' ergibt zwar einen Moll-Dreiklang; aber mit dem d' oder gar mit der Verdoppelung des es', die noch dazu aus der ekmelischen Proportion $\frac{7}{3}$ stammt, wissen wir nichts anzufangen. Versuchsweise nehmen wir einmal den tiefsten Ton des ›größten unveränderlichen Systems‹ als Einheit an und erhalten:

(1A)	$\frac{2}{1}$ a		$\frac{9}{4}$ h		$\frac{7}{3}$ c-'		$\frac{12}{5}$ c'		$\frac{3}{1}$ e'
		$\frac{9}{8}$		$\frac{28}{27}$		$\frac{36}{35}$		$\frac{5}{4}$	

In die untere Zeile haben wir zwischen die einzelnen Tonwerte gleich die Verhältnisse geschrieben, die sie miteinander bilden. Daran erkennen wir, daß die Folge h c-' c' e' ein Tetrachord in enharmonischer Stimmung bildet, durch einen Ganzton von der Mese a getrennt. Die Hauptverhältnisse des Athenatempels ergeben somit – auf den Ton A als Einheit bezogen – das getrennte Tetrachord des griechischen Musiksystems in enharmonischer Stimmung.

Eine Zwischenbemerkung zur Chronologie sei erlaubt. Gegen Ende des 6. Jahrhunderts v. Chr. lebte in Unteritalien Pythagoras mit seiner Schule. Antike Überlieferung, freilich teilweise erst die einer späteren Zeit, schreibt ihm mathematisch-musikalische Forschungen zu; die später sogenannten Pythagoreer nennen ihn als Begründer ihrer Lehre. Zu diesen zählt auch Archytas, dem wir die oben genannten Tetrachordstimmungen verdanken. Noch zu Lebzeiten des Pythagoras oder unmittelbar danach entstand der Athenatempel in Paestum, nicht weit von der Wirkungsstätte jener religiös-politischen Gemeinschaft in Kroton entfernt. Er weist eine harmonikale Proportionierung auf, und zwar auf der Grundlage derselben enharmonischen Tetrachordstimmung, wie sie uns über hundert Jahre später von Archytas überliefert wird. Die Art der Proportionstechnik ist dabei keineswegs mehr tastend oder unsicher, sondern wird bereits völlig beherrscht, wie auch aus dem schon erwähnten Urteil der Archäologen hervorgeht. Konnte man aber Klangproportionen in architektonische Form umsetzen, so ließen sich auch andere sichtbare und meßbare Größen mit den empfindungsmäßig bestimmbaren Werten der musikalischen Intervalle exakt vergleichen. Das ist der Grundgenke des Pythagoreismus, wie er offenbar schon für die Zeit des PYTHAGORAS selbst anzunehmen ist.[9] – Die moderne philologische Forschung tendiert allerdings zu, PYTHAGORAS als eine Art urweltlichen Medizinmann aus der Geschichte der ernst zu nehmenden Wissenschaft zu streichen. Mir freilich will es paradox erscheinen, einem ungenannten Architekten zuzuschreiben, was noch zur Lebenszeit des PYTHAGORAS entstand, was die Überlieferung ihm zuschreibt und was in seiner Schule tradiert wurde.

Kehren wir nochmals zum Athenatempel zurück und betrachten jetzt seinen Aufriß. Die Säulenhöhe beträgt 6,122 m. Zu diesem Maß brauchen wir nur 4,3 cm zu addieren, um genau 18,75 Fuß zu erhalten:

$$6{,}165 : 0{,}3288 = 18{,}75.$$

Die Höhe der Krepis, des dreistufigen Unterbaues, beträgt 3,75 Fuß, den 5. Teil der Säulenhöhe. Denselben Betrag erhält man auch als Quotient aus der Höhe vom Boden bis zur Unterkante des Gesimses (30 Fuß) und der Jochweite (8 Fuß): 30 : 8 = 3,75. Rechnet man alle Maße vom Boden aus, so lassen sie sich in ganzzahligen Vielfachen davon ausdrücken:[10]

Krepis	1 · 3,75
Höhe der Säulen	6 · 3,75
Höhe der Gesimsunterkante	8 · 3,75
Gesamthöhe	10 · 3,75

Daraus gewinnen wir folgende Proportionen:

Gesamthöhe : Gesimshöhe	5 : 4
Gesimshöhe : Säulenhöhe	4 : 3
Säulenhöhe : Krepis	6 : 1
Gesimshöhe : Jochweite	15 : 4

Ferner bildet die Gesamthöhe mit der Säulenhöhe, wenn man diese zwischen Stylobat und Architravunterkante mißt, das Verhältnis 2 : 1.

Um zu einem Ergebnis zu kommen, müssen wir diesmal das e des getrennten Tetrachords als Einheit annehmen und von ihm aus abwärtsschreiten, was ja griechischer Gepflogenheit entspricht. Dazu müssen wir die oben zusammengestellten Proportionen umkehren, da sie in dieser Form auf einen tiefer gelegenen Grundton bezogen sind. Wir erhalten folgende Tonreihe:

$\frac{1}{6}$ a,, $\frac{4}{15}$ f, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ h $\frac{4}{5}$ c'   (1e')

Diese weit auseinanderliegende Tonfolge transponieren wir anschließend in die Oktav zwischen $\frac{1}{2}$e und 1e':

$\frac{1}{2}$ e		$\frac{8}{15}$ f		$\frac{2}{3}$ a		$\frac{3}{4}$ h		$\frac{4}{5}$ c'		(1 e')
	$\frac{16}{15}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{5}{4}$	

Wir haben eine aus fünf Tönen bestehende Oktavskala erhalten. Sie weist die große Terz $\frac{5}{4}$ auf, muß vom griechischen Standpunkt aus folglich der Enharmonik zugerechnet werden. Die beiden Vierteltöne sind durch den Halbton $\frac{16}{15}$ ersetzt. Der phrygische Aulet Olympos verwendete eine pentatonische Skala aus Halbtönen und Terzen, und zwar gebrauchte er offenbar schon die reine Terz $\frac{5}{4}$. Aus dieser Großterzpentatonik hat sich die Enharmonik entwickelt.[11] Diese Pentatonik haben wir hier vor uns, allerdings mit einem trennenden Ganzton, während Olympos selbst die verbundenen Tetrachorde verwendete. Den diazeuktischen Ganzton a – h soll nämlich erst Pythagoras eingeführt und damit das getrennte Tetrachord geschaffen haben.[12]

Die Terz kann aus der Quint entwickelt werden durch harmonische Teilung des Frequenzverhältnisses oder durch arithmetische Teilung des Längenverhältnisses der schwingenden Saiten oder tönenden Rohre (in absteigender Tonfolge):

Frequenzen	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{4}$	harmonische Proportion
Längen	$\frac{6}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{4}$	arithmetische Proportion

Die beiden rechten Glieder stehen zueinander im Verhältnis der großen Terz $\frac{5}{4}$ bzw. $\frac{4}{5}$. Sie wird zur Quint ergänzt durch das Intervall zwischen den beiden linken Gliedern, der kleinen Terz $\frac{6}{5}$ bzw. $\frac{5}{6}$. Diese finden wir ebenfalls an unserem Tempel. Die Höhe der Metopen verhält sich zu deren Breite wie $6:5$, zur Breite der Triglyphen wie $6:3 = 2:1$; die Metopenbreite steht zur Triglyphenbreite im Verhältnis $5:3$. Wenn wir diese Werte ordnen und auf die Einheit beziehen, erhalten wir innerhalb eines Oktavrahmens die kleine Terz und ihre Umkehrung:

(1 c) $\frac{6}{5}$es $\frac{5}{3}$a $\frac{2}{1}$c'

Nun zum jüngeren Heratempel, der früher als Poseidontempel bezeichnet wurde. Er wurde erst nach dem Tempel des Zeus in Olympia erbaut. Sein

Baumeister kannte den Zeustempel sogar recht genau und hatte an ihm gelernt. Da an ihm das einheimische Prinzip der Proportionierung vom Bauprinzip des Mutterlandes überlagert wird,[13] dürfen wir eigentlich kaum harmonikale Maßverhältnisse erwarten. Dennoch sind sogar recht deutlich solche Proportionen zu erkennen.

Das Grundrißverhältnis ist in diesem Fall in der Tänie festgelegt, dem schmalen, durch seine Farbigkeit einst allerdings hervorgehobenen Band zwischen Architrav und Fries. Es beträgt 180 Fuß in der Länge, 72 Fuß in der Breite, den Fuß zu 0,329 m gemessen. Die Länge verhält sich also zur Breite wie 5 : 2 – Die Höhe der Zella ist noch zu erkennen, obwohl die Decke fehlt. Diese wurde von zwei doppelstöckigen Säulenreihen getragen, über denen jeweils ein Architrav lag. Vom oberen Architrav leitete ein Profil zur Decke über. Dieses Profil liegt 11,32 m oder umgerechnet 34,4 Fuß über dem Boden, wir dürfen wohl rund 35 Fuß ansetzen. Die Oberkante des unteren Architravs liegt 6,927 m hoch, das sind 21 Fuß. Die Gesamthöhe verhält sich zur Höhe des unteren Gebälks wie 35 : 21 = 5 : 3. Damit haben wir die Hauptproportion der Innenraumgliederung gefunden. Die Säulen selbst messen unten 18,4 Fuß, oben 10,4 Fuß; sie stehen im Verhältnis 16 : 9 zueinander.

Die Säulen der Ringhalle sind 27 Fuß hoch, das Gebälk darüber 9 Fuß stark. Die Tempelbreite bildet mit der Gesamthöhe das Verhältnis 3 : 2; die Gesamthöhe mißt daher 48 Fuß. Davon gehen 4 Fuß für die Stufen des Unterbaues ab, so daß für den Giebel 12 Fuß bleiben. Danach können wir eine ganze Reihe von Proportionen aufstellen:

Gesamthöhe : Höhe des Gebälks über dem Stylobat	48 : 36 = 4 : 3
Höhe des Gebälks über dem Stylobat : Säulenhöhe	36 : 27 = 4 : 3
Giebel : Stärke des Gebälks	12 : 9 = 4 : 3
Breite : Säulenhöhe	72 : 27 = 8 : 3
Breite : Gebälkhöhe über Stylobat	72 : 36 = 2 : 1
Breite : Gesamthöhe	72 : 48 = 3 : 2
Gesamthöhe : Säulenhöhe	48 : 27 = 16 : 9

Es ist auffallend, daß die Front des Tempels aus solchen Proportionen konzipiert ist, die in der griechischen Musik den bei aller Verschiedenheit der Einstimmung stets gleichbleibenden Rahmen abgeben.[14] Beziehen wir die Werte auf den Grundton 1 e, ergibt sich:

	$\frac{8}{3}$ a				12
	$\frac{2}{1}$ e			12	9
getrenntes Tetrachord		$\frac{16}{9}$ d			8
	$\frac{3}{2}$ h		verbundenes Tetrachord	9	
Mese	$\frac{4}{3}$ a	$\frac{4}{3}$ a		8	6
	(1 e)			6	

Aber nicht nur als Rahmenintervalle sind diese Werte wichtig. Sie ergeben sich nämlich aus wiederholter Anwendung der arithmetischen und der harmonischen Teilung auf das Oktavverhältnis. Das arithmetische Mittel zwischen zwei Werten α und ω findet man nach der Formel $a = \frac{\alpha+\omega}{2}$; das harmonische Mittel nach $h = \frac{2\alpha\omega}{\alpha+\omega}$. Geht man vom Grundton 1 e aus, stellt die Oktave 2 e darüber und schreibt die beiden Mittelwerte dazwischen, erhält man:

$$1\,\mathrm{e} \qquad \tfrac{4}{3}\mathrm{a} \qquad \tfrac{3}{2}\mathrm{h} \qquad 2\,\mathrm{e}$$

Ebenso wird mit der Oktave über der Mese verfahren:

$$1\,\mathrm{a} \qquad \tfrac{4}{3}\mathrm{d} \qquad \tfrac{3}{2}\mathrm{e} \qquad 2\,\mathrm{a}$$

Um Bruchzahlen zu vermeiden, braucht man nur als Anfangsglied 6 statt 1 anzunehmen und erhält dann:

6 a   8 d   9 e   12 a.

Wir finden auf diese Weise die viergliedrige Proportion 6 : 8 : 9 : 12, die als Tetraktys bei den Pythagoreern fast religiöse Verehrung genoß.[15] Wir haben oben am rechten Rand unserer Übersicht die Tetraktys zweimal eintragen können; die Proportionen der Tempelfront sind somit also ein Spiel mit der heiligen Vierheit.

Um vollständige Tetrachorde zu erhalten, fehlen uns noch Werte mit der Primzahl 7. Wir finden die folgenden:

Gebälkhöhe über Stylobat : Höhe des unteren Zellaarchitravs	36 : 21 = 12 : 7
Säulenhöhe : Höhe des unteren Zellaarchitravs	27 : 21 = 9 : 7

Alle gefundenen Werte beziehen wir nun auf den höchsten Ton des Systems, d.h. wir müssen wieder die Kehrwerte verwenden. Im wesentlichen erhalten wir damit die Oktav über der Mese a.

(1 a)		
$\frac{4}{5}$ f		Grundriß
$\frac{7}{9}$ f-		Säulen : Zellaarchitrav
$\frac{3}{4}$ e		Frontaufriß
	$\frac{2}{3}$ d	Breite : Höhe
$\frac{3}{5}$ c		Zellahöhe : unterer Architrav
$\frac{7}{12}$ c-		Außenbebälk : Innengebälk
$\frac{9}{16}$ h		Gesamthöhe : Säulenhöhe
$\frac{1}{2}$ a		Breite : Gebälkhöhe

Das Grundrißverhältnis $\frac{2}{5}$ käme allerdings als Tonwert f als einziges unterhalb der Mese zu stehen, während im obersten Tetrachord gerade ein f, nämlich das Verhältnis $\frac{4}{5}$ fehlt. Wir transponieren daher das zu tief geratene f um eine Oktave nach oben. Vielleicht wird eine solche Veränderung, die wir ja einige Male vornehmen mußten, als Einwand angesehen. Weil wir aber immer nur die Oktavlage, nie den Tonwert als solchen veränderten, und weil es sich dabei um eine typische harmonikale Operation handelt, wird gerade hierdurch unsere Ansicht bestätigt, daß die Baumeister von Paestum in musikalischen Proportionen dachten. Und schließlich gibt uns das nunmehr erzielte Ergebnis recht.

In den Maßverhältnissen des jüngeren Heratempels erscheint die ganze obere Oktav des ›größten unveränderlichen Systems‹ in enharmonischer Stimmung. Ausgefüllt sind dabei die beiden Tetrachorde über dem diazeuktischen Ganzton a – h, angedeutet wird auch das verbundene Tetrachord a – d.[16]

Neben der Großterz der Enharmonik findet sich auch hier wieder die kleine Terz. Die Anzahl der Kanneluren in den Säulen beträgt außen 24, bei den unteren Zellasäulen 20 und bei den oberen Zellasäulen 16. Diese Zahlen bilden das Verhältnis 4 : 5 : 6, also eine dreigliedrige arithmetische Proportion. Als Verhältnisse von Schwingungszahlen aufgefaßt, stellen die äußeren Glieder das Intervall der Quint dar, die beiden linken die große Terz, die beiden rechten die kleine Terz. Wir würden das als Dur-Dreiklang bezeichnen. Dem Architekten aber lag vermutlich daran, zu zeigen, durch welche arithmetische Beziehung aus der Konsonanz der Quint das charakteristische Intervall der Enharmonik hervorgeht.

Wir sind von dem Tongeschlecht ausgegangen, das typisch griechisch ist und uns ganz fremd. Wir fanden es wieder im Proportionsschema der Tempel von Paestum, wodurch wir die Ergebnisse KAYSERS bestätigen und ergänzen konnten. Die Tempel von Paestum sind eine steinerne Verkörperung der enharmonischen Musik der Griechen. Sie sind aber auch ein monumentales Zeugnis pythagoreischen Geistes.

Anmerkungen

[1] Hans Kayser, Paestum. Die Nomoi der altgriechiscloen Tempel von Paestum. Heidelberg 1958

[2] Rudolf Haase, »Das pythagoreische Lambdoma in neuer Sicht«, in: Österreichische Musikzeitschrift, 1962 (Sonderdruck.)

[3] In allem, was das griechische Musiksystem betrifft, richte ich mich nach Martin Vogel, Die Enharmonik der Griechen, 2 Bde., Düsseldorf 1963

[4] Vgl. Vogel I S. 33; 47 ff.; Diels, Fragmente der Vorsokratiker, I 47 A 16. – Archytas ist nicht nur der älteste Musiktheoretiker, von dem wir genaue Angaben über Tetrachordstimmungen haben, sondern auch für die antike Musikgeschichte besonders wichtig.

[5] Vogel I S. 114 f.

6 Vgl. Kayser S. 38 ff.

[7] Berve-Gruben, Griechische Tempel und Heiligtümer, München 1961, S. 202. – Alle Zahlenangaben zu den Tempeln sind außer dem Werk Kaysers diesem Buch entnommen.

[8] Berve-Gruben S. 203

[9] Kayser ist in allen seinen Werken bemüht, die psycho-physische Natur der Harmonik deutlich zu machen, die er der Einseitigkeit unseres haptischen (auf dem Tastsinn beruhenden) Weltbildes gegenüberstellt. Er verficht auch die

These, daß bereits Pythagoras selbst ein reiches harmonikales Wissen hatte.
[10] Vgl. oben S. 2, dort jedoch in einem größeren Fußmaß 3,5 Fuß als kleinste Strecke.
[11] Vogel II, insbesondere S. 78 ff., 104, 120 f.
[12] Vogel I, S. 26, II S. 18, mit Quellennachweis.
[13] Berve-Gruben S. 206; Kayser S. 62 ff.
[14] Vgl. Vogel I, S. 37 f.
[15] Kayser, Lehrbuch der Harmonik, S. 104.
[16] Wir mußten für jede Skala einen anderen Grundton annehmen, was vielleicht zu willkürlich zu sein scheint. Aber erstens kommt es nur auf die gegenseitigen Verhältnisse an; zweitens liegt jeder dieser Grundtöne innerhalb des Systems selbst; drittens sind die Bezugstöne nur die höchsten oder tiefsten Töne des ganzen Systems oder seiner mittleren Oktave. – Die für ein vollständiges Tetrachord benötigten Proportionen verteilen sich vielfach auf weit auseinanderliegende Bauglieder. Es werden selbst ungleichartige Stücke miteinander verglichen, wie Säulenhöhe außen mit Gebälkhöhe innen. Möglicherweise soll durch diese ›Verschränkung‹ die Geschlossenheit des Eindrucks erreicht werden. Das könnte auch der Grund für sein, daß sich komplizierte Verhältniszahlen wie $\frac{28}{27}$ oder $\frac{36}{35}$ nur selten unmittelbar beim Vergleich zweier Größen finden, sondern erst als Quotienten zwischen den einfacheren primäreren Verhältnissen auftreten.

Erstveröffentlichung: ANTAIOS Bd. VIII, Stuttgart 1967, S. 458